数理解析研究所講究録
500巻 1983年 46-62

Transcendental radius and Mirsky functional

大阪教育大学　藤井正俊
Masatoshi FUJII

0. Introduction. Non-normal operator の理論は、初期の段階において、次の不等式

(1) $$r(T) \leqslant w(T) \leqslant \|T\|$$

を中心に発展してきました。cf. Halmos [11]。($r(T)$, $w(T)$ は、それぞれ、T の spectral radius、numerical radius です。) 例えば、normal operator T に対しては、不等式(1)において等号が成立します:

(2) $$T;\ \text{normal} \Longrightarrow T;\ \text{normaloid} \Longleftrightarrow w(T) = \|T\|$$
$$\text{i.e., } r(T) = \|T\|$$

ところで、不等式(1)は、次の包含関係より導びかれます:

(1)′ $$\mathrm{co}\,\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$$

ここで、$\mathrm{co}\,\sigma(T)$ は、T の spectrum $\sigma(T)$ の convex hull、$\overline{W(T)}$ は、T の numerical range

$$W(T) = \{(Tx, x)\ ;\ \|x\| = 1\}$$

の closure とします。そして、normal operator のもう一つの側面は、

$$\mathrm{co}\,\sigma(T) = \overline{W(T)}$$

が成り立つこと、すなわち、normal operator は convexoid であることがあげられます。これらのことをまとめてみますと operator の class の間に、次のような平行四辺形ができ上ります:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \text{spectraloid} & \\ \text{normaloid} \arrow[ur] & & \text{convexoid} \arrow[ul] \\ & \text{transaloid} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ここで、spectraloid とは、$r(T) = w(T)$ をみたす class、transaloid は、任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、$T - z$ が normaloid によって定義されます。この diagram は、Furuta – Nakamoto [9] による convexoid の特徴付け

$$T;\ \text{convexoid} \iff T - z\ ;\ \text{spectraloid} \quad (z \in \mathbb{C})$$

によって意味を持ちます。実際、上の平行四辺形が考えられる根拠は、

$$(3) \qquad \begin{aligned} \sigma(T - z) &= \sigma(T) - z \\ W(T - z) &= W(T) - z \end{aligned} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

であります。そして、(3)より $r(T)$, $w(T)$ が translation に関して不変でないことも明らかでしょう。

それならば、translation-invariant な半径で、(1)の不等式に当ることを考えるとどうなるでしょうか？ (3)を利用しますと、$r(T)$, $w(T)$ に対応するものは、次のように簡単に定義することができます:

$$R_T = \min\{ r \geqq 0 \,;\, \sigma(T) \subseteq r\mathbb{D} \}$$
$$W_T = \min\{ r \geqq 0 \,;\, W(T) \subseteq r\mathbb{D} \}$$

ただし、$r\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} \,;\, |z| \leqq r \}$ とします。

ここでは、norm $\|T\|$ に対応する translation-invariant な operator の半径で、不等式(1)の translatable 版が成り立つようなもの — transcendental radius — を提示したいと思います。実際には、operator 自身が考えられた時点で、その時すでにそれが存在していたことが知られるでしょう。そして、それに関連して、Mirsky による行列に対する半径を C^*-algebra の枠の中で議論したいと思います。

1. Transcendental radius.

まず、歴史的なことを少し述べてみましょう。１９６３年 Björck-Thomée は、Hörmander の指導の下で、エネルギー積分の maximalizing problem から、次のような定数

$$B_T = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 - |(Tx, x)|^2$$

を導入し、

$$B_T = R_T^2 \quad \text{for normal } T$$

を示しました。その後、１９７２年になり、Istratescu が

$$B_T = R_T^2 \quad \text{for transaloid } T$$

であること。また、convexoid に対しては、一般に、$B_T \neq R_T^2$ であることが、２年後、Sheth によって示されました。

１９８０年になり、Prasanna-Sheth は、$T - z_T$ が normaloid, i.e., T が centroid であれば、十分であることを指摘しました。(z_T は、$\sigma(T)$を含む最小の円板の中心です。)

(4) $$B_T = R_T^2 \quad \text{for centroid } T$$

そして翌年、Prasanna は、(4)の逆も成立することを証明しました。これによって、Björck-Thomée に始まった等式 $B_T = R_T^2$ に関する operator の一従来の non-normal operator の理論における一 class の決定という問題は、片付きました。しかし、それが完全にということになりますと、(1)に対応した不等式を提示することと、(2)に対応することが言えなければならないでしょう。

Prasanna の idea は、B_T と Stampfli の derivation に関する論文[22]を結びつけたところにありました。Stampfli に従って、

$$\|T - m_T\|^2 + |z|^2 \leq \|T - m_T + z\|^2 \quad (z \in \mathbb{C})$$

をみたす $m_T \in \mathbb{C}$（唯一つ存在する）をTの center of mass と呼びます。

Lemma 0. (Prasanna)

$$B_T = \|T - m_T\|^2$$

そこで、$M_T = \sqrt{B_T}$ とおきますと、M_T は、Tと$\mathbb{C}$との距離 $d(T, \mathbb{C})$ に他ならず；

(5) $$M_T = d(T, \mathbb{C})$$

Tの center of mass m_T は、Tの unique scalar approximant ということになります。我々は、それ故、M_T をTの transcendental radius と呼びたいと思います。この半径は、B_T をTの分散と考えるならば、Tの標準偏差ということになります。直接計算より、$B_{T-z} = B_T$、よって、$M_{T-z} = M_T$、及び、$m_{T-z} = m_T$ が判ります。

(1)に対応する不等式は、次の形で得ることができます。

Theorem 1. [7]

$$R_T \leq W_T \leq M_T$$

Theorem 1 の原形は、1980年に Garske [10] によって、$R_T \leqslant M_T$ という形で得られています。この証明は、もとの Björck - Thomée のものを再検討してできたものですが、さらに逆のぼって、

$$R_T \leqslant M_T \quad \text{for convexoid } T$$

という注意を [12] に見ることができます。

次に、(2)に対応する事実としましては、最初の"$\Rightarrow$"は、Björck - Thomée そのものですし、その次の"$\Longleftrightarrow$"に当るものは、Furuta - Izumino - Prasanna [8] によって、(2)と同様のやり方で証明されています:

Theorem 2.

$$T;\ \text{centroid, i.e., } R_T = M_T \Longleftrightarrow W_T = M_T$$

2. Proofs.

Lemma 0 の証明は、次の通りです。

$$B_T = B_{T-m_T} = \sup_{\|x\|=1} \|(T-m_T)x\|^2 - |((T-m_T)x, x)|^2$$
$$\leqslant \sup_{\|x\|=1} \|(T-m_T)x\|^2 = \|T-m_T\|^2$$

逆の不等号の証明には、次の Stampfli の結果を使いますと簡単になります:

$$z = m_T \Longleftrightarrow 0 \in W_0(T-z)$$

ここで、$W_0(S)$ は、S の maximal numerical range

$$W_0(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, (Sx_n, x_n) \to \lambda \text{ for some } \{x_n\};\ \|x_n\|=1,\ \|Tx_n\| \to \|T\|\}$$

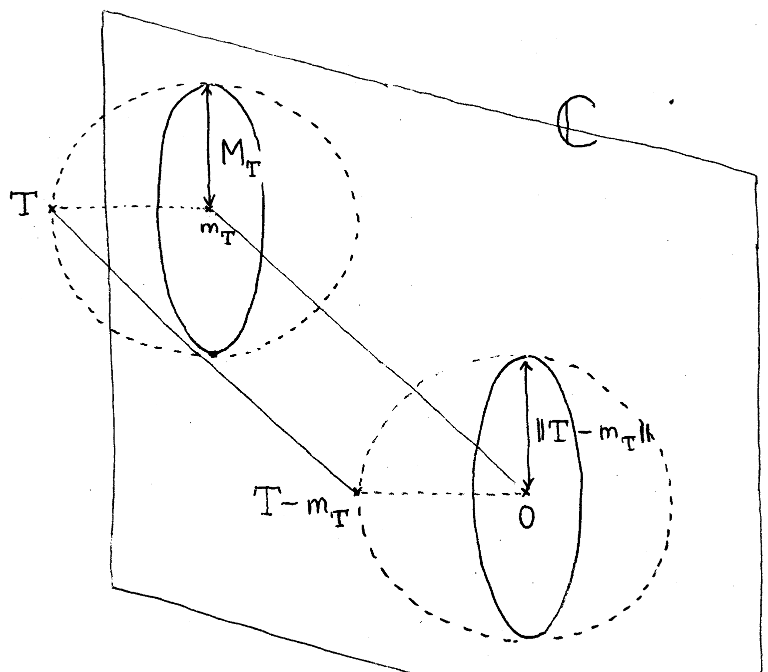
です。従って、$0 \in W_0(T - m_T)$ なので、

$$\exists \{x_n\} \,;\, \|x_n\| = 1,\ ((T-m_T)x_n, x_n) \to 0,\ \|(T-m_T)x_n\| \to \|T-m_T\|$$

$$\begin{aligned} B_T = B_{T-m_T} &\geq \lim\left[\|(T-m_T)x_n\|^2 - |((T-m_T)x_n, x_n)|^2\right] \\ &= \|T - m_T\| \end{aligned}$$

Proof of Theorem 1.

T の代りに $T - m_T$ を考えることにしましょう。



明らかに、

$$W(T - m_T) \subseteq \|T - m_T\|\mathbb{D} = M_T\mathbb{D}$$

よって、

$$W_T = W_{T-m_T} \leq M_T$$

Remark.

Prasanna の Lemma は、実際には、Asplund-Ptak [2] により、もっと一般的な形の定理として与えられています:

$$\sup_{\|x\|=1} \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|Ax+\lambda Bx\| = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \sup_{\|x\|=1} \|Ax+\lambda Bx\| \quad \forall A,B\in\mathcal{L}(E,F)$$

$\Longleftrightarrow$ E, F ; inner product spaces.

この節を閉じるにあたり、G_1-operator と centroid の関係について、少し述べておきたいと思います。T が

$$\|(T-z)^{-1}\| \leq 1/d(z,\sigma(T)) \qquad (z\notin\sigma(T))$$

をみたすとき、T を G_1-operator と呼びます。一般に、

$$G_1\text{-operator} \not\Rightarrow \text{normaloid}$$

はよく知られていることですが、やはり同様に、

$$G_1\text{-operator} \not\Rightarrow \text{centroid}$$

が Garske によって示されています。例えば、

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \text{the simple unilateral shift}$$

とすれば、Luecke principle [5] より、T が G_1-operator は明らかで、$M_T = \|T\| = 2 > 1 = W_T$ となっています。

ところが、spectraloid でない centroid も存在します;

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3i$$

それにもかかわらず、quasinilpotent centroid は 0 以外にはありません。実際、$M_T = 0$ なので、

$$\|Tx\| = |(Tx, x)| \qquad \text{for } \|x\| = 1$$

よって、$T = 0$。さらに、この事実は、Fialkow の question [4; 4.16] が negative であることも示しています。

3. Mirsky functionals.

もう一度話を1950年代に戻しましょう。1956－7年にかけて、Mirsky [16, 17] は、matrix A に対して、A の spread を

$$s(A) = \max\{|\lambda - \mu|;\ \lambda, \mu \in \sigma(A)\}$$

によって定義し、A が Hermitian の場合には

$$s(A) = 2\, m(A)$$

を示しています。ここで、

$$m(A) = \sup\{|(Ax, y)|;\ \|x\| = \|y\| = 1,\ x \perp y\}.$$

これを Mirsky's constant と呼ぶことにします。

一方、1973年 Ando は、$d(T, \mathbb{C})$ を次の形で与えています：

Theorem 3. (Ando)

(6) $$d(T, \mathbb{C}) = \sup\{\|P^{\perp} T P\|;\ P;\ (\text{rank one})\ \text{projection}\}$$

ところが、$M_T = \sup_{\|x\|=1} \|Tx - (Tx, x)x\|$

及び、$\|x\| = 1$ に対して、

$$\|Tx - (Tx, x)x\| = \|P_{[x]}^{\perp} T x\| = \sup\{|(Tx, y)| ; x \perp y, \|y\| = 1\}$$

に注意すれば、($P_{[x]}$ は、x の span する subspace への projection)

Theorem 4. [6], [7]

$$M_T = m(T) = \sup\{\|P^{\perp} T P\| ; P : (\text{rank one}) \text{ projection}\}$$

なお、$M_T = m(T)$ は、Izumino [13] によって簡単な証明が与えられています。

次に、この定理を C^*-algebra の枠の中で見ることにしましょう。まず、linear functional

$$f(T) = (Tx, y)$$

を見直さねばなりません。明らかに、f は、

(7) $\quad f(1) = 0, \quad \|f\| = 1.$

をみたしています。

$\mathfrak{A}$ を unital C^*-algebra とするとき、(7)をみたす $\mathfrak{A}$ 上の linear functional を Mirsky functional といい、それらの全体のなす集合を $\mathfrak{M}$ とかくことにします。そのとき、$M_T = d(T, \mathbb{C})$ とみれば、Theorem 4 の C^*-version は、次のようになるでしょう, [15]。

Theorem 4'.

$$M_T = \max\{|f(T)| \, ; \, f \in \mathfrak{M}\} \qquad (T \in \mathfrak{A})$$

証明は、$\mathfrak{A}/\mathbb{C}$ に対して、Hahn-Banach の定理を摘用し、$(\mathfrak{A}/\mathbb{C})^* = \{f \in \mathfrak{A}^* \, ; \, f(1) = 0\}$ に注意するだけのことです。

ところが、Stampfli [22] が出たその年に、Williams [23] が Björck-Thomée constant B_T の C^*-版について議論しています。

Theorem 5. (Williams)

$$M_T^2 = \max\{f(T^*T) - |f(T)|^2 \, ; \, f: \mathfrak{A} \text{ の state}\}$$

実際に、彼は、これを使って、次の同値を示しています:

(a) $\|T\| \leq \|T - z\|$ $\quad (z \in \mathbb{C})$

(b) $\exists$ state f ; $f(T^*T) = 1$, $f(T) = 0$

(c) $\|T\|^2 + |z|^2 \leq \|T + z\|^2$ $\quad (z \in \mathbb{C})$

特に、(c) は、$m_T = 0$ に他ならないこと。また、Theorem 5 の右辺は、Björck-Thomee constant B_T の C^*-版であるにもかかわらず、それらのことに全く触れていないことは、不思議としか言いようがありません。

ところで、Theorem 5 は Theorem 4′ から導くことができます。

Lemma 6. unital C^*-algebra $\mathfrak{A}$ の Mirsky functional f は、cyclic representation (π, H) と orthonormal vectors $x, y \in H$ を使って

$$f(A) = (\pi(A)x, y) \qquad (A \in \mathfrak{A})$$

とかけます。

Theorem 4′ ⇒ Theorem 5 :

仮定より、$M_T = g(T)$ となる Mirsky functional g があります。g は、$g(T) = (\pi(T)x, y)$ とかけますので、

$$\begin{aligned} M_T^2 &= (\pi(T)x, y)^2 \\ &= (\pi(T)x - (\pi(T)x, x)x, y)^2 \\ &\leq \| \pi(T)x - (\pi(T)x, x)x \|^2 \\ &= \| \pi(T)x \|^2 - |(\pi(T)x, x)|^2 \\ &\leq M_{\pi(T)}^2 \leq M_T^2 \end{aligned}$$

従って、$f(T) = (\pi(T)x, x)$ が求める state になります。

逆に、Theorem 5 ⇒ Theorem 4′ も、Izumino の手法 [13] を利用して、すぐに示すことができます。実際、

$$\exists \text{ state } f \; ; \quad M_T = f(T^*T) - |f(T)|^2$$

とするとき、GNS construction を使って、

$$f(A) = (\pi(A)x, x) \qquad (\|x\|=1)$$

とし、y を $\pi(T)x-(\pi(T)x,x)x$ を normalize したものとします。($\pi(T)x=(\pi(T)x,x)x$ のときは、$y\perp x$, $\|y\|=1$ をとればok.)

$$g(A) = (\pi(A)x, y)$$

は、Mirsky functional で、$M_T = g(T)$ をみたします。

この節を終えるに際し、2×2 matrix algebra M_2 への completely positive maps と Mirsky functionals の関係について述べておきたいと思います。C^*-algebra $\mathfrak{A}$ から M_2 への completely positive map F は、次の形で表わされることが知られています:

$$F(A) = \begin{pmatrix} f_1(A) & g(A) \\ g(A^*)^* & f_2(A) \end{pmatrix}$$

ここで、f_i は states, g は Mirsky functional の scalar 倍となっています。逆に、(Lemma 6 より)

Corollary 7. [15]

Mirsky functional g は、unital completely positive map の off-diagonal として表わされる。

4. Mirsky maps and derivations.

前節に続き、Lemma 6 の応用について考えたいと思います。まず、Mirsky functionals の分解から始めましょう。

Theorem 8. [14]

Mirsky functional f は、state g と derivation D と representation π の合成であらわされます:

$$f = g \circ D \circ \pi$$

Proof. Lemma 6 より、$f(A) = (Ax, y)$ と仮定できます。ここで、$g(A) = (Ax, x)$ としますと、$x \otimes y$ により induce された derivation D によって、

$$\begin{aligned} g(D(A)) &= g(x \otimes A^*y - Ax \otimes y) \\ &= ((x \otimes A^*y)x, x) - ((Ax \otimes y)x, x) \\ &= (x, A^*y) = f(A) \end{aligned}$$

最後に、前定理の linear map への拡張を試みたいと思います。unital C^*-algebra $\mathfrak{A}$ から $B(H)$ への linear map L が

(a) $L(1) = 0$

(b) L; completely contractive, i.e., $\|L \otimes I_n\| \le 1 \ \forall n$

をみたすとき、L を Mirsky map と呼びます。Paulsen [18]

は、最近、completely contractive map に対する Steinspring 型の分解定理を示しています: completely contractive map $L; \mathfrak{A} \to B(H)$ に対して、representation $\pi : \mathfrak{A} \to B(K)$ と isometries $V_1, V_2 ; H \to K$ が存在して、

$$L(A) = V_2^* \pi(A) V_1$$

をみたします。

そこで、L が Mirsky map ならば、$V_2^* \pi(1) V_1 = 0$ となります。一方、V_i は isometries なので、

$$\text{partial isometry } V ; \overline{\mathrm{ran}\, V_2} \longrightarrow \overline{\mathrm{ran}\, V_1}$$

が定義できます。そして、

$$D = D_{V\pi(1)}$$

$$G(T) = V_1^* T V_1 \qquad (T \in B(K))$$

とします。$V_2^* \pi(1) V_1 = 0$ より、$V\pi(1)V_1 = VV_2V_2^*\pi(1)V_1 = 0$ となりますので、

$$\begin{aligned} G(D(\pi(A))) &= V_1^*(V\pi(1)\pi(A) - \pi(A)V\pi(1))V_1 \\ &= V_1^* V \pi(A) V_1 = V_2^* \pi(A) V_1 \\ &= L(A) \end{aligned}$$

Theorem 9. [14]

Mirsky map は、completely positive map と Derivation と representation の合成で表わすことができます。

References.

1. T.Ando : The distance to the set of scalars, unpublished.
2. E.Asplund and V.Ptak : A minimax inequality for operators and a related numerical range, Acta Math., 126(1971), 53-62.
3. G.Bjorck and V.Thomee : A property of bounded normal operators in Hilbert space, Arkiv for Math., 4(1963), 551-555.
4. L.A.Fialkow : A note on norm ideals and the operator X AX-XB, Israel J. Math., 32(1979), 331-348.
5. M.Fujii : On some examples of non-normal operators. II, Proc. Japan Acad., 49(1973), 118-123.
6. M.Fujii and R.Nakamoto : An estimation of the transcendental radius of an operator, Math. Japon., 27(1982), 637-638.
7. M.Fujii and S.Prasanna : Translatable radii for operators, Math. Japon., 26(1981), 653-657.
8. T.Furuta, S.Izumino and S.Prasanna : A characterization of centroid operators, Math. Japon., 27(1982), 105-106.
9. T.Furuta and R.Nakamoto : On the numerical range of an operator, Proc. Japan Acad., 47(1971), 279-284.
10. G.Garske : An inequality concerning the smallest disc that contains the spectrum of an operator, Proc. Amer. Math. Soc., 78(1980), 529-532.
11. P.R.Halmos : A Hilbert Space Problem Book, Springer, 1974.
12. V.I.Istratescu : On a class of normaloid operators, Math. Z., 124(1972), 199-202.

13. S.Izumino : An estimation of the transcendental radius of an operator, II, Math. Japon., 27(1982), 645-646.

14. D.Kainuma and E.Kamei : Mirsky's theorem for C*-algebras, to appear in Math. Japon.

15. A.Matsumoto and Y.Seo : Mirsky's theorem for C*-algebras, Math. Japon., 28(1983), 135-138.

16. L.Mirsky : The spread of a matrix, Mathematika, 3(1956), 127-130.

17. L.Mirsky : Inequality for normal and hermitian matrices, Duke Math. J., 24(1957), 591-599.

18. V.I.Paulsen : Every completely polynomially bounded operator is similar to a contraction, preprint.

19. S.Prasanna : The norm of a derivation and the Bjorck-Thomee-Istratescu theorem, Math.Japon., 26(1981), 585-588.

20. S.Prasanna and I.H.Sheth : A remark on a paper of V.Istratescu, Indian J. Pure Appl. Math., 11(1980), 212-214.

21. I.H.Sheth : On a conjecture of Istratescu, J. Indian Math. Soc., 38(1974), 337-338.

22. J.G.Stampfli : Norm of a derivation, Pacific J. Math., 33 (1970), 737-747.

23. J.P.Williams : Finite operators, Proc. Amer. Math. Soc., 26 (1970), 129-136.